

Az Operációkutatási Tanszék MSc  
szakdolgozati témái

2019. szeptember 25.

tanszéki honlap: <http://or.elte.hu>

## 1. Közös bázisok pakolása matroidokban

**Témavezető: Bérczi Kristóf**

Több régóta nyitott gráfoptimalizálási probléma is megfogalmazható közös bázisok pakolásának problémájaként két matroid metszetében. A hallgató feladata a kapcsolódó irodalom áttekintése mellett olyan speciális esetek vizsgálata, melyekben a kérdéses pakolás létezésére jó karakterizáció adható.

<https://arxiv.org/pdf/1903.03579>

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

## 2. Konstruktív karakterizációs algoritmusok alkalmazása adatközponti hálózatokban (Ez a téma már foglalt.)

**Témavezető: Bérczi-Kovács Erika**

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

## 3. Diszkrét konvex optimalizálás és alkalmazásai

**Témavezető: Frank András**

Közismert, hogy miként lehet eldönteni, hogy egy gráfnak van-e olyan irányítása, amelyben minden csúcs befoka egy előre megadott érték, és még az is standard folyam-eszközökkel kezelhető, ha az ilyen irányítások közül a legolcsóbbat szeretnénk megtalálni. Egy gyakorlatból eredő (erőforrás kiosztási) feladatban egy gráf olyan irányításának igénye merült fel, amelyben a be-fokok négyzetösszege minimális. Kiderült, hogy erre is elegáns válasz adható, de a dolog háttérében sokkal több van mint ami hálózat- és matroid- optimalizálásról mester-szakon szerepel. K. Murota japán matematikus kidolgozta a Diszkrét konvex analízis elméletét. Az elmúlt két évben a vele folytatott közös kutatómunka során kiderült, hogy miként lehet összekapcsolni ezt a szemléletet az Edmonds-típusú jó karakterizációk, min-max tételek, és polinomiális algoritmusok világával.

A szakdolgozó feladata egyrészt a Murotával közösen kidolgozott elmélet valamely szeletének részletes áttekintése, másrészt a szakirodalom idevonatkozó gyakorlati indíttatású cikkeinek feldolgozása, különös tekintettel ütemezési és erőforrás elhelyezési alkalmazásokra. Számos reményteli nyitott probléma is izgalmas kihívást jelent.

Olyan hallgató jelentkezését várom, aki (ha a területet valóban izgalmasnak találja) készen áll komoly energiákat befektetni a vizsgálatokba.

Kapcsolatfelvétel a frank@cs.elte.hu címen.

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

#### 4. Gráfok és szerkezetek merevségének kombinatorikus vizsgálata

**Témavezető: Jordán Tibor**

Rúdszerkezetek merevségével kapcsolatos kérdések egyrészt érdekes elméleti problémákhoz vezetnek, melyek geometriai, algebrai es kombinatorikus módszerekkel vizsgálhatók, másrészt az eredmények számos, látszólag távoli területen alkalmazhatók (pl. molekulák stabil és mozgó részeinek meghatározása, kinyitható antennák tervezése, vezető nélküli járművek alakzatainak kialakítása, stb).

A szakdolgozó feladata a terület egy meghatározott részének áttekintése, lehetőleg érdemben hozzájárulva néhány nyitott kérdés háttérének megvilágításához. A vizsgálandó szakirodalom legnagyobb része angol nyelvű.

Néhány aktuális témakör: matroidok a diszkrét geometriában, a kombinatorikus merevség alkalmazási területei, globálisan merev gráfok és szerkezetek jellemzése, tensegrity szerkezetek, poliéderek merevségének vizsgálata, algebrai módszerek a merevségelméletben, kombinatorikus algoritmusok és előállítási tételek merev gráfok osztályaira.

Jordán Tibor, Recski András, Szeszler Dávid, Rendszeroptimalizálás, Typotex, 2004.  
Frank András, Jordán Tibor, Diszkrét optimalizálás, Typotex, 2014.

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

#### 5. Hálózat optimalizálási feladatok

**Témavezető: Jordán Tibor**

A szakdolgozó feladata különböző diszkrét optimalizálási feladatok vizsgálata hálózat optimalizálási és tervezési (network design) problémákban. A cél az ismert módszerek, algoritmusok áttekintése, a még megoldatlan kérdések felderítése, esetleg algoritmusok implementálása, tesztelése. A vizsgálandó szakirodalom legnagyobb része angol nyelvű.

Néhány aktuális témakör: közelítő algoritmusok a Steiner network feladat különböző változataira, gráfok összefüggőségének optimális növelése.

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

#### 6. Fenyőpakolások alkalmazásai

**Témavezető: Király Csaba**

Edmonds fenyőtétele a kombinatorikus optimalizálás egyik alapvető tétele számos alkalmazással. A gyakorlati alkalmazások ihlették az eredmény Kamiyama, Katoh és Takizawa féle általánosítását. Az utóbbi években számos további általánosítása

jelent meg ezen tételeknek, melyek az elméletben jelentősek, de egyéb alkalmazásuk még nem ismert.

A szakdolgozó feladata a korábbi alkalmazások feltérképezése, és annak vizsgálata, hogy milyen új alkalmazási lehetőségeket nyitnak meg az új eredmények.

Cs. Király, On maximal independent arborescence packing, SIAM Journal on Disc. Math., 30(4) (2016) 2107–2114. <http://bolyai.cs.elte.hu/>

Cs. Király, Z. Szigeti, Reachability-based matroid-restricted packing of arborescences, <http://bolyai.cs.elte.hu/>

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

## 7. Többszörösen merev gráfok

**Témavezető: Király Csaba**

Minimális élszámú több pont illetve él elhagyása után is merev gráfok élszámáról viszonylag kevés dolog ismert, bár a meglévő módszerekkel a témakörben még számos eredmény érhető el. A szakdolgozó feladata a szakirodalomban megtalálható módszerek segítségével lehetőleg éles élszámbecsléseket adni  $k$  él/pont elhagyása után is merev gráfok élszámára.

V.E. Kaszanitzky, Cs. Király: On minimally highly vertex-redundantly rigid graphs. Graphs and Combinatorics, 32(1), 225-240 (2016). <http://bolyai.cs.elte.hu/>

T. Jordán: Combinatorial rigidity. Graphs and matroids in the theory of rigid frameworks, in: Discrete geometric analysis. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2016. pp. 33-112

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

## 8. A színes Carathéodory tétel

**Témavezető: Király Tamás**

Bárány Imre bizonyította be a Carathéodory tétel következő “színes” változatát: ha adott  $\mathbb{R}^d$ -ben  $d + 1$  olyan ponthalmaz aminek a konvex burka tartalmazza  $0$ -t, akkor kiválasztható mindegyikből egy pont úgy, hogy a kiválasztott pontok konvex burkában is benne van  $0$ . A hallgató feladata a tétellel és az algoritmikus vonatkozásaival kapcsolatos irodalom feldolgozása, MSc szakdolgozó esetén önálló kutatás a témában.

Wolfgang Mulzer, Yannik Stein, Computational Aspects of the Colorful Caratheodory Theorem, <http://arxiv.org/abs/1412.3347> Imre Bárány and Shmuel Onn, Colourful Linear Programming and Its Relatives, <https://ie.technion.ac.il/~onn/Selected/MOR97.pdf> J. de Lorea et al., The discrete yet ubiquitous theorems of Carathéodory, Helly, Sperner, Tucker, and Tverberg, <https://arxiv.org/abs/1706.05975>

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus, matematikus

9. **Ütközés-mentes útvonal-optimalizálás (Ez a téma már foglalt.)**

**Témavezető: Király Tamás**

A többfejes 3d nyomtatás hatékonysága javítható a nyomtatófejek útvonalának optimalizálásával. A nyomtatófejek ütközésének elkerülésére kidolgozott módszerek érdekes ütemezési feladatokhoz vezetnek; a hallgató feladata ezek vizsgálata, és megoldási módszerek kidolgozása.

Ganganath et al., Trajectory Planning for 3D Printing: A Revisit to Traveling Salesman Problem A Agnetis, H Kellerer, G Nicosia, A Pacifici, Parallel dedicated machines scheduling with chain precedence constraints, European Journal of Operational Research Volume 221, Issue 2, 1 September 2012, Pages 296-305

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikusu és matematikus

10. **Diszjunktív vágások a kombinatorikus optimalizálásban (Ez a téma már foglalt.)**

**Témavezető: Kis Tamás**

A diszjunktív vágásokat Egon Balas vezette be még a 70-es évek közepén diszjunktív programok konvex burkának a leírására. Ugyanakkor a vágások képzésének egyszerű elve lehetővé teszi, hogy sok jól ismert kombinatorikus problémára, mint például maximális vágás, maximális aciklikus részgráf, aszimmetrikus utazó ügynök probléma, alkalmazzuk, hogy érvényes egyenlőtlenségeket kapjunk a megoldások konvex burkára. A téma feldolgozása néhány cikk megismeréséből, a módszer bemutatásából valamint új alkalmazási területek feltérképezéséből áll.

A. Letchford, On disjunctive cuts for combinatorial optimization, Journal of Combinatorial Optimization, 5 (2001) 299-315.

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

11. **AGV flotta ütemezés és irányítás (Ez a téma már foglalt.)**

**Témavezető: Kis Tamás**

A diplomamunka témája AGV flotta irányítása, és a feladatok ütemezése. A járművek egy irányított gráfon mozognak (lehetnek párhuzamos, ellentétesen irányított élek is), és a céljuk az újabb és újabb, előre nem ismert szállítási feladatok teljesítése. Egyrészt olyan irányítási mechanizmusokat kell találni, amelyek "egyszerűek", és megakadályozzák, hogy a járművek összeütközzenek, illetve deadlock helyzet alakuljon ki. Másrészt a feladatokat járművekhez kell rendelni úgy, hogy a feladatok össz-várakozása minél kisebb legyen.

Gawrilow, E., Klimm, M., Möhring, R. H., Stenzel, B. (2012). Conflict-free vehicle routing. EURO Journal on Transportation and Logistics, 1(1-2), 87-111.

[https://www.researchgate.net/profile/Rolf\\_Moehring/publication/237567977\\_Conflict-free\\_Real-time\\_AGV\\_Routing/links/542c0aba0cf277d58e8aa87e.pdf](https://www.researchgate.net/profile/Rolf_Moehring/publication/237567977_Conflict-free_Real-time_AGV_Routing/links/542c0aba0cf277d58e8aa87e.pdf)

Disser, Y., Klimm, M., Lübbecke, E. (2015, July). Scheduling bidirectional traffic on a path. In International Colloquium on Automata, Languages, and Programming (pp. 406-418), <https://arxiv.org/pdf/1504.07129.pdf>

Stenzel, B. (2008). Online disjoint vehicle routing with application to AGV routing, PhD thesis, [https://www.depositonce.tu-berlin.de/bitstream/11303/2225/1/Dokument\\_47.pdf](https://www.depositonce.tu-berlin.de/bitstream/11303/2225/1/Dokument_47.pdf)

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

## 12. Közelítő algoritmusok párosításra és matroid parityre

**Témavezető: Pap Gyula**

Bár a maximális párosítás feladatra ismerünk hatékony, polinomiális algoritmust, Edmonds algoritmusát, mégis érdekes lehet vizsgálni a párosítás feladat különböző változataira adható randomizált és approximációs algoritmusokat. A matroid parity feladat esetén különösen érdekes a dolog, ott ugyanis általános matroidok esetén nem létezik polinomiális algoritmus, azonban közelítő algoritmus mégis adható.

<https://arxiv.org/abs/1102.3491>

[https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-57568-5\\_248](https://link.springer.com/chapter/10.1007/3-540-57568-5_248)

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

## 13. Bonyolultságelméleti kérdések a chip-firing játék kapcsán

**Témavezető: Tóthmérész Lilla**

A chip-firing játék egy egyszerű egyszemélyes játék egy gráfon. A csúcsokon szét van osztva néhány chip, amiket a „lövés”-nek nevezett művelettel lehet újraosztani: Ha egy csúcson legalább annyi chip van, mint a fokszám, akkor őt „kilőhetjük”, azaz minden szomszédjának átadhatunk egy-egy chipet. Bár ez egy nagyon egyszerűen hangzó játék, sok mindenhez köze van, például a Tutte polinomhoz és tekinthető egyfajta „diszkrét” algebrai geometriának is. A hallgató feladata a játékhoz kapcsolódó bonyolultságelméleti kérdések áttekintése lenne, illetve nyitott kérdések vizsgálata.

A. Björner and L. Lovász. Chip-firing games on directed graphs. *J. Algebraic Combin.*, 1(4):305–328, 1992. A. Björner, L. Lovász, and P. W. Shor. Chip-firing games on graphs. *European J. Combin.*, 12(4):283–291, 1991. M. Farrell and L. Levine. Coeulerian graphs. *Proc. Amer. Math. Soc.* Bálint Hujter, Viktor Kiss, Lilla Tóthmérész, On the complexity of the chip-firing reachability problem, *Proc. Amer. Math. Soc.* 145 (2017), 3343-3356

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus

## 14. Gráfok gonality-je

**Témavezető: Tóthmérész Lilla**

Egy gráf gonality-je egy viszonylag egyszerűen definiálható mennyiség, ami egy algebrai geometriai fogalom kombinatorikus analógja. A hallgató feladata a téma eredményeinek feldolgozása. E mellett nyitott kérdéseken is lehet gondolkozni, például nyitott hogy mi a "diszkrét" és a "folytonos" világbeli gonality viszonya. Ezt a kérdést érdemes lenne számítógépes programmal megvizsgálni.

Dion Gijswijt, Harry Smit and Marieke van der Wegen Computing graph gonality is hard, <https://arxiv.org/pdf/1504.06713.pdf> M. Baker. Specialization of linear systems from curves to graphs. Algebra and Number Theory, 2(6):613–653, 2008. With an appendix by Brian Conrad. M. Baker and S. Norine. Harmonic morphisms and hyperelliptic graphs. Int. Math. Res. Not. IMRN (2009), no 15, 2914-2955.

Ajánlott szakok: alkalmazott matematikus és matematikus