

**Az Operációkutatási Tanszék szakdolgozat témái
matematika bsc**

2009. október

tanszéki honlap: <http://www.cs.elte.hu/opres/>

Téma címe: Dinamikus programozási algoritmusok

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Frank András**

Téma rövid leírása:

A szakdolgozó feladata áttekintést készíteni dinamikus programozási algoritmusok gráf optimalizálási alkalmazásairól.

Ismeretes, hogy egy gráfban az összes pontpárra miként lehet egy legrövidebb utat meghatározni dinamikus programozás segítségével (Warshall algoritmus). Ez a megközelítés számtalan egyéb helyen jól alkalmazható, bár gyakran komoly leleményességet igényel a megfelelő algoritmus megkonstruálása. (Például egy minimális Steiner fa kiszámítása síkgráf esetén, ha a terminál pontok a végtelen tartomány határán vannak). Ízelítőül két érdekes probléma:

(i) Piros-kék élszínezett digráfban keressünk s -ből t -be utat, amely legfeljebb p piros és legfeljebb k kék élt használ.

(ii) Egy digráfban keressünk olyan minimális élszámú részgráfot, amelyben t elérhető s -ből és s elérhető t -ből.

A cél az ilyen jellegű problémák minél szélesebb körű összegyűjtése és bemutatása. A munka értékét külön emeli, ha az algoritmusok némelyike számítógépes megvalósításra kerül. Legalább alapfokú angol matematika szövegértés szükséges: egy 1500 szavas kereshető matematika szöszedettel tudok segíteni.

Téma címe: Hálózati optimalizálási modellek

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Frank András**

Téma rövid leírása:

A szakdolgozó feladata áttekintést készíteni a hálózati optimalizálás gyakorlatban potenciálisan felhasználható modelleiről.

A megengedett áram feladatnak, maximális folyamoknak, legolcsóbb áramoknak és folyamoknak (beleértve a legolcsóbb utakat), megengedett potenciáloknak megannyi gyakorlati alkalmazása ismeretes. Gyakran komoly szellemi teljesítmény felismerni, hogy a megadott feladat miképp vezethető vissza folyam problémára. Például, hány újságíró kell kiküldeni az olimpiára, hogy az általunk fontosnak tartott eseményekről, melyeknek pontos menetrendje előre ismert, be tudjanak számolni? Vagy: Hogyan lehet egy éjjel-nappal működő telefonos ügyfélszolgálat munkatársainak a beosztását optimálisan elkészíteni, ha a nap minden órájában adott, hogy hány munkatársra van szükség, és mindenki 8 órát dolgozik egyfolytában? Ez csak két példa a feladatok jellegének érzékeltetésére.

Olyanok jelentkezését tartom jónak, akiket a matematikai és az alkalmazási rész egyaránt érdekel. Előny (bár nem elvárás), ha számítógépes megvalósítás is készül.

Téma címe: Kombinatorikus optimalizálás szenzorhálózatokon

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Jordán Tibor**

Téma rövid leírása:

Egy szenzorhálózat sok apró érzékelőből áll, melyek egyszerű számítási feladatok elvégzésére képesek, továbbá bizonyos szenzorpárok drótnélküli kapcsolatban állhatnak egymással. Egy ilyen hálózat tervezésekor és működtetésekor számos feladat merülhet fel: a felhasznált energia minimalizálása, hatékony kommunikáció, lokalizáció, optimális hatósugár beállítása, stb. A feladat a szakirodalom feldolgozása, valamint a kombinatorikus feladatok kiszűrése és vizsgálata.

Téma címe: Gráfok összefüggőségi problémái

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Jordán Tibor**

Téma rövid leírása:

A gráfelmélet egyik nagy területe a gráfok és irányított gráfok összefüggőségi tulajdonságainak vizsgálata. Ide tartoznak az összefüggőséget meghatározó algoritmusok, az összefüggőség-növelési feladatok, a minimális súlyú többszörösen összefüggő részgráf problémák, extrémális kérdések, diszjunkt út problémák, stb. A feladat az új eredmények áttekintése, feldolgozása, továbbgondolása.

Téma címe: Ütemezési feladatok

matematikus, alkalmazott matematikus, elemző

Témavezető: **Jordán Tibor**

Téma rövid leírása:

Az ütemezésemélet válogatott eredményeinek áttekintése. Kombinatorikus módszerek kidolgozása, algoritmusok elemzése és tesztelése.

Téma címe: Minimális vágás kereső algoritmusok összehasonlítása

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Király Tamás**

Téma rövid leírása:

A gráfelmélet egyik alapvető algoritmus a Nagamochi és Ibaraki max-vissza sorrendre épülő módszere a minimális vágás megtalálására. A közelmúltban Nagamochi kidolgozott egy hasonló, de más sorrendre épülő módszert gráfok és hipergráfok extrém halmazainak felsorolására. A hallgató feladata a két fajta algoritmus összehasonlítása, valamint az extrém halmazokat kereső algoritmus implementálása a LEMON C++ könyvtár segítségével.

Téma címe: Gomory vágások régen és ma

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Király Tamás**

Téma rövid leírása:

Ralph E. Gomory 50 évvel ezelőtt dolgozta ki vágósíkos algoritmusát egészértékű programozási feladatok megoldására. Bár az algoritmus elméleti fontosságát mindenki elismerte, sokáig nem tartották alkalmasnak nagyméretű feladatok megoldására. A kilencvenes években azonban több kutató arra a következtetésre jutott, hogy kisebb módosításokkal, és a Korlátozás és Szétválasztás módszerével kombinálva a Gomory vágások rendkívül hatékonyan használhatók. A hallgató feladata az algoritmus változatainak az összegyűjtése, és a Gomory vágásokkal kapcsolatos újabb eredmények ismertetése a szakdolgozatban.

Téma címe: OWA Operátorok a döntéstámogatásban

alkalmazott matematikus, elemző

Témavezető: **Fullér Róbert**

Téma rövid leírása:

Az *Ordered Weighted Averaging* (OWA) operátorokat Ronald R. Yager vezette be a kritériumok aggregálására a többkritériumu döntési problémákban. Az OWA operátorok jól alkalmazhatóak a kiválasztásos problémákban, ahol több jelölt közül és több szakértő (gyakran egymásnak ellentmondó) véleménye alapján kell kiválasztani a kritériumoknak leginkább eleget tévő alternatívát. A megfelelő aggregációs operátor kiválasztása nem egy egyszerű feladat, mivel először meg kell határozni a kompenzáció mértékét, azaz azt, hogy egy kritérium gyengébb teljesítése mennyiben ellensúlyozható más kritériumok jobb teljesítésével. Feladat: Áttekintést adni az OWA operátorokról.

Hitel csere-ügyletek (Credit swaps)

alkalmazott matematikus, elemző

Témavezető: **Fullér Róbert**

Téma rövid leírása:

A *swap contract* vagy egyszerűen csak *swap* magyarul csere-ügyletet jelent. A csereügyletet keretében a két szerződő fél - az *International Swaps and Derivatives Association* által bevezetett és betartatott szabványosított formában - megállapodik abban, hogy előre meghatározott időpontokban a swap szerződés lejáratáig egymásnak bizonyos dolgoktól függő (pld LIBOR, BUBOR, EURIBOR) összegeket fizetnek. Tipikus példa, ha valaki egy lebegő kamatozású dollárban jegyzett adósságát el akarja cserélni egy fix kamatozású euro adósságra, mivel a bevételai euroban keletkeznek és az euro-dollár árfolyamváltozásaiból fellépő kockázatokat le akarja fedezni. Ekkor a swap piacon - egy swap dealeren keresztül - elcseréli ezt a dollárban jegyzett adósságát egy euroban jegyzett fix-kamatozású adósságra (azaz átkonvertálja a dollárban jegyzett adósságát euroban jegyzett adósságra). Ilyenkor a swap dealer is jutalékot kap azért, mert az üzletet összehozta.

Az 1998-ban szabványosított úgynevezett hitel csere-ügyletek (*credit swaps*) keretében az egyik szerződő fél által egy harmadik félnek nyújtott hitelre a másik szerződő fél nemfizetés esetére készpénzfizetői garanciát vállal és ezért cserébe ez a másik fél előre meghatározott időközökben előre meghatározott összegeket kap a hitelnnyújtó féltől. Itt a kérdés az az, hogy mennyi legyen ez az összeg, amit hitelnnyújtó pénzintézet fizessen ezért a védelemért a hitelt biztosító pénzintézetnek. Nyilván ez az összeg attól függ, hogy mennyire kockázatos a nyújtott hitel (azaz a hitelt felvevő vállalat). Mivel itt általában hosszú lejáratú, részben fedezett és igen nagyösszegű hitelről van szó (azaz milliárdos nagyságrendűről) ezért az adós vállalat kockázata nem egyszerűen mérhető. Feladat: Összegyűjteni a különböző, típusú hitel csere-ügylet termékek árazási módszereit.

Téma címe: Korlátok események uniója valószínűségére

matematikus, alkalmazott matematikus, elemző

Témavezető: **Mádi-Nagy Gergely**

Téma rövid leírása:

Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges események. Uniójuk valószínűsége a Poincaré (vagy szita) formula szerint:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n,$$

ahol a k -adik binomiális momentum:

$$S_k = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

A gyakorlatban általában csak legfeljebb m tagú metszetek valószínűségei ismertek, ahol $m \ll n$. Ilyenkor már csak becsülni tudjuk az unió valószínűségét. A legismertebb becslés a Bonferroni-egyenlőtlenség:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{m-1} S_m, \quad \text{ha } m \text{ páratlan,}$$

illetve ugyanez \geq relációs jellel, ha m páros. Természetesen ennél sokkal jobb becslések is adhatóak, ezeket tekintenénk át. A módszerek egy része gráfelméleti eszközöket használ, a másik része lineáris programozási módszertant.

Téma címe: Diszkrét Csebisev-típusú egyenlőtlenségek

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Mádi-Nagy Gergely**

Téma rövid leírása:

Legyen ξ egy nemnegatív valószínűségi változó. Keressük a $P(\xi \geq a)$ valószínűséget. Ha csak a $\mu = E(\xi)$ várható érték ismert, akkor a Markov egyenlőtlenség segítségével felső korlátot adhatunk. Hasonlóan, ha ismert $\sigma^2 = E(\xi^2) - E^2(\xi)$ (vagy ezzel ekvivalens módon $\mu_2 = E(\xi^2)$), akkor a Csebisev egyenlőtlenség ad felső becslést. Tegyük most fel, hogy ξ diszkrét, véges tartójú valószínűségi változó, tartója legyen $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$. Tegyük fel, hogy $z_0 < z_1 < \dots < z_{r-1} < a \leq z_r < \dots < z_n$. Ekkor az alábbi LP feladat megoldása megadja a $P(\xi \geq a)$ valószínűség legjobb alsó és felső korlátját:

$$\begin{array}{ll} \min(\max) & p_r + \dots + p_n \\ \text{subject to} & \\ & p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1 \\ & z_0 p_0 + z_1 p_1 + \dots + z_n p_n = \mu \\ & z_0^2 p_0 + z_1^2 p_1 + \dots + z_n^2 p_n = \mu_2 \\ & p_0, p_1, \dots, p_n \geq 0, \end{array}$$

Ezen a gondolatmeneten elindulva további algoritmikus ill. képletszerű korlátok adhatóak. A feladat az ezzel kapcsolatos irodalom áttekintése, esetleg valamely algoritmus numerikus implementálása.

Téma címe: Közlekedési játékok

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Végh László**

Téma rövid leírása: Egy város úthálózatát egy gráffal modellezzük; minden útszakaszon az áthaladás sebessége az útszakasz forgalmától függ. Minden autós úgy próbál közlekedni, hogy a lehető leggyorsabban érjen célba. Mennyire jó ez a közlekedési stratégia azzal összehasonlítva, mintha egy központi irányító osztaná úgy el a forgalmat, hogy átlagosan a leggyorsabban tudjon mindenki közlekedni? Roughgarden és Tardos kiindulási cikke nyomán az utóbbi években ez téma az algoritmikus játékelmélet egy új és gyorsan fejlődő területévé vált.

Téma címe: Az iteratív kerekítés technikája

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Végh László**

Téma rövid leírása: Tekintsük a következő feladatot: egy gráfban szeretnénk egy minimális költségű k -szorosán élösszefüggő részgráfot találni. A probléma NP-teljes, és sokáig nyitott volt az a kérdés, hogy lehet-e jó approximációs algoritmust találni. Kamal Jain egy meglepő, új módszer segítségével adott 2-approximációt. Tekinti a probléma lineáris programozási relaxációjának egy bázismegoldását, és erről egy ravasz leszámítási módszer segítségével bizonyítja, hogy van legalább $1/2$ értékű komponense. Ennek értékét felkerekíti 1-re, majd újra megoldja a relaxációt, újra talál egy $1/2$ értékű komponenst, stb. A keresett élhalmaz tehát lineáris programozási feladatok egy sorozatának megoldásából adódik. Ez az iteratív kerekítések módszerének első megjelenése, ami aztán több, látszólag különböző területen került elő, és segítette elő nehéz approximációs kérdések megoldását. A szakdolgozat célja a technika megismerése és mélyebb megértése.

Téma címe: A globális élösszefüggőség növelése gráfokban

alkalmazott matematikus, elemző

Témavezető: **Bernáth Attila**

Téma rövid leírása: Adott egy gráf és egy k természetes szám. A feladat minél kevesebb új él hozzávételével k -élösszefüggővé tenni ezt a gráfot. Ez a globális élösszefüggőség növelési feladat, ami mind irányítatlan, mind irányított gráfokban értelmes és megoldható polinom időben (természetesen irányítatlan gráfokhoz irányítatlan éleket adunk hozzá, irányított gráfokhoz irányított éleket). A feladat az elméleti eredmények megismerése, egyes algoritmusok implementálása a LEMON programkönyvtárban.

Téma címe: A lokális élösszefüggőség növelése irányítatlan gráfokban

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Bernáth Attila**

Téma rövid leírása: Irányítatlan gráfokban megfogalmazható az úgynevezett lokális élösszefüggőség növelési feladat: ahelyett, hogy a gráfot k élösszefüggővé akarnánk tenni, minden u, v pontpárra meg van adva (szimmetrikusan) egy $r(u, v)$ igény, és minimális sok él hozzávételével az u és v között az élösszefüggőséget legalább $r(u, v)$ -re szeretnénk növelni (minden u, v pontpárra). Ezt Gabow algoritmus $O(n^3 m \log(n^2/m))$ futásidővel oldja meg: kérdés, hogy tudunk-e egyszerűbb algoritmussal hasonlóan jó futásidőt elérni.

Téma címe: Arrow-Debreue piacmodell és kapcsolata a lineáris komplementaritási feladatokkal

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Illés Tibor**

Téma rövid leírása:

Arrow és Debreue 1954-ben a Management Science folyóiratban megjelent cikkükben igazolták, hogy bizonyos simasági és konkavitási feltételek mellett léteznek az ún. equilibrium árak. Évtizedeken keresztül igyekeztek olyan ekvivalens matematikai programozási modelleket megfogalmazni, amelyekhez könnyebben lehetne hatékony megoldó algoritmusokat definiálni. Yinyu Ye az elmúlt években publikált néhány olyan cikket, amelyekben különböző hasznosságfüggvények esetén tárgyalja az Arrow-Debreue piacmodell egyensúlyi árai kiszámításának a komplexitását. A szakdolgozat célja a témakör szakirodalmának és alkalmazási lehetőségének a feldolgozása lenne és egy-egy speciális esethez tartozó matematikai programozási modell numerikus megoldása kisméretű tesztfeladatok esetén.

Téma címe: Infizibilis belsőpontos, primál-duál algoritmusok lineáris programozási feladatra

matematikus, alkalmazott matematikus

Témavezető: **Illés Tibor**

Téma rövid leírása:

A fizibilis belsőpontos algoritmusok szakirodalma igen nagy. Ugyanúgy igaz ez az infizibilis belsőpontos algoritmusokra is. A lényeges különbség a két algoritmus osztály között, hogy gyakorlatban igazából az infizibilis belsőpontos algoritmusokat alkalmazzák. A szakdolgozat célja az infizibilis belsőpontos algoritmusok szakirodalmának az áttekintése különös tekintettel arra, hogy miért alkalmazzák ezeket az algoritmusokat a gyakorlatban és miért nem az ún. beágyazásos technikán alapuló fizibilis belsőpontos módszereket.

Téma címe: Schnyder-címkézések és alkalmazásaik

matematikus

Témavezető: **Pap Júlia**

A téma rövid leírása:

Schnyder mutatta meg, hogy minden háromszögelt síkgráf éleit meg lehet úgy színezni illetve irányítani, hogy a csúcsoknál bizonyos sorrendben következzenek az élek. Ennek a szép struktúrának a segítségével belátta, hogy minden síkgráf pontjait le lehet tenni egy $(n - 2) \times (n - 2)$ -es rács pontjaiba úgy, hogy az éleknek megfelelő szakaszok ne messék egymást. Sőt az is következmény, hogy egy gráf incidencia-poszetjének dimenziója pontosan akkor legfeljebb 3, ha a gráf síkgráf. A hallgató feladata ezek és további Schnyder-címkézésekkel kapcsolatos eredmények feldolgozása.